

5.00 crédits




30.0 h + 15.0 h

Q2


**Cette unité d'enseignement bisannuelle n'est pas dispensée en 2026-2027 !**

Enseignants	Van der Linden Tim ;
Langue d'enseignement	Français > English-friendly
Lieu du cours	Louvain-la-Neuve
Préalables	Il est recommandé que l'étudiant-e ait une bonne expérience des méthodes de base employées dans tout raisonnement mathématique, comme développées dans un cours de méthodologie, d'algèbre, d'analyse ou de géométrie de la première année du bachelier en mathématique ou en physique, ou un cours de mathématique de la première année de bachelier en sciences de l'ingénieur (toute spécialité confondue).
Thèmes abordés	On commence avec un point de vue naïf sur les ensembles. Dans ce cadre on introduit les ordinaux et les cardinaux, et on en développe une théorie élémentaire qui montre très clairement que ce point de vue naïf n'est pas tenable. On aborde alors la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo et Fraenkel. On s'intéresse particulièrement aux problèmes d'indépendance et d'(in)cohérence, prenant comme exemples particuliers l'axiome du choix et l'hypothèse du continu, et la solution aux problèmes de taille proposé dans (une version simple de) la théorie des univers de Grothendieck. En parallèle on donne une base du calcul des propositions et des prédicats, c'est-à-dire des structures et langages du premier ordre, dont on a besoin pour bien comprendre les problèmes qui apparaissent dans la théorie des ensembles.
Acquis d'apprentissage	<p><b>A la fin de cette unité d'enseignement, l'étudiant est capable de :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Contribution du cours aux acquis d'apprentissage du programme de bachelier en mathématique : A la fin de cette activité, l'étudiant aura progressé dans sa capacité à :                     <ul style="list-style-type: none"> <li>• Connaître et comprendre un socle fondamental des mathématiques.</li> <li>• Choisir et utiliser des méthodes et des outils fondamentaux de la logique pour résoudre des problèmes de formalisation en mathématique.</li> <li>• Reconnaître les concepts fondamentaux de certaines théories mathématiques actuelles.</li> <li>• Etablir les liens principaux entre ces théories, les expliquer et les motiver par des exemples.</li> <li>• Dégager, grâce à l'approche abstraite et expérimentale propre aux sciences exactes, les aspects unificateurs de situations et expériences différentes en mathématique.</li> <li>• Faire preuve d'abstraction et esprit critique.</li> <li>• Reasonner dans le cadre de la méthode axiomatique.</li> <li>• Reconnaître les arguments clef et la structure d'une démonstration.</li> <li>• Construire et rédiger une démonstration de façon autonome.</li> <li>• Apprécier la rigueur d'un raisonnement mathématique et en déceler les failles éventuelles.</li> </ul> </li> <li>• Acquis d'apprentissage spécifiques au cours : A la fin de cette activité, l'étudiant sera capable de:                     <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reasonner dans le cadre de la logique des propositions et des prédicats, faire une déduction naturelle.</li> <li>• Reconnaître si un certain groupement d'objets est un ensemble.</li> <li>• Utiliser la théorie des ordinaux et des cardinaux pour déterminer la taille d'un ensemble, et pour comparer les tailles de deux ensembles donnés.</li> <li>• Utiliser l'induction transfinie et le lemme de Zorn.</li> <li>• Comprendre le statut de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu dans le cadre des axiomes de Zermelo—Fraenkel, von Neumann—Bernays—Gödel et la théorie des univers.</li> </ul> </li> </ul>
Modes d'évaluation des acquis des étudiants	L'évaluation vise à tester la connaissance et la compréhension des notions, des exemples et des résultats fondamentaux, la capacité de construire un raisonnement cohérent, la maîtrise des techniques de démonstration introduites pendant le cours. L'évaluation consiste en un examen final oral (théorie 60%, exercices 40%). Pour établir la note finale, on tiendra compte de l'examen oral et de la participation active aux TP.
Méthodes d'enseignement	Les activités d'apprentissage sont constituées de cours magistraux et de séances de travaux pratiques. Les cours magistraux visent à introduire les concepts fondamentaux, à les motiver en montrant des exemples et en établissant des résultats, à montrer leurs liens réciproques et leurs liens avec d'autres cours du programme de bachelier en sciences mathématiques. Les séances de travaux pratiques visent à apprendre les techniques de base du calcul des propositions et des prédicats, c'est-à-dire des structures et langages du premier ordre.
Contenu	Cette activité vise à expliciter les lois qui gouvernent le raisonnement mathématique au stade de la présentation comme théorie formalisée. On examine les particularités des langages utilisés, les propositions prises comme points de départ, les règles de déduction habituellement admises. On se focalise sur les limites de l'entreprise de

	<p>formalisation, notamment sur l'impossibilité de garantir une rigueur définitive. L'esprit et la présentation sont du même type que pour un autre cours de mathématique: on donne des définitions, on construit des enchaînements de propositions, on démontre des théorèmes. Les contenus suivants sont abordés dans le cadre du cours.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Théorie naïve des ensembles: ordinaux et cardinaux</li> <li>- La théorie axiomatique des ensembles: (ZF) et (NBG), théorie des univers, axiome du choix, cohérence</li> <li>- La logique des propositions et des prédicats</li> </ul>
Ressources en ligne	Site Moodle. Le site contient le syllabus du cours, les énoncés des exercices pour les séances de travaux pratiques et le plan détaillé du cours.
Bibliographie	<ul style="list-style-type: none"> <li>• K.J. Devlin, <i>Fundamentals of Contemporary Set Theory</i>, Springer, 1979</li> <li>• H. Herrlich, G. E. Strecker, <i>Category Theory</i>, 3 ed., Sigma Ser. Pure Math., vol. 1, Heldermann Verlag, 2007</li> <li>• K. Hrbacek, K.T. Jech, <i>Introduction to Set Theory</i>, 3rd Edition, Marcel Dekker, 1999</li> <li>• F. W. Lawvere, R. Rosebrugh, <i>Sets for Mathematics</i>, Cambridge University Press, 2003</li> </ul>
Faculté ou entité en charge:	MATH

<b>Programmes / formations proposant cette unité d'enseignement (UE)</b>				
Intitulé du programme	Sigle	Crédits	Prérequis	Acquis d'apprentissage
Approfondissement en sciences mathématiques	APPMATH	5		
Mineure en mathématiques	MINMATH	5		
Master [120] en enseignement section 4 : mathématiques	MATH2M4	5		
Mineure en enseignement des mathématiques	APPENSMAT	5		