UCLouvain

lmat1237

2026

Introduction à la logique : théorie des modèles

5.00 crédits	30.0 h + 15.0 h	Q2

Cette unité d'enseignement bisannuelle est dispensée en 2026-2027

Enseignants	Vitale Enrico ;
Langue d'enseignement	Français > English-friendly
Lieu du cours	Louvain-la-Neuve
Préalables	Il est recommandé que l'étudiant·e ait une bonne expé rience des méthodes de base employées dans tout raisonnement mathématique, comme développées dans un cours de méthodologie, d'algèbre, d'analyse ou de géométrie de la première année du bachelier en mathématique ou en physique, ou un cours de mathématique de la première année de bachelier en sciences de l'ingénieur (toute spécialité confondue).
Thèmes abordés	Après une introduction naïve en termes de tables des valeurs de vérité , on définit la logique propositionnelle (généralisée, intuitionniste et classique) et l'algèbre de Lindenbaum-Tarski en utilisant le calcul des séquents à la Gentzen. Ensuite, on explore la versione algébrique de la logique propositionnelle : les treillis, les algèbres de Heyting et les algèbres de Boole. On entre dans le vif du sujet avec la définition de la notion de modèle, la preuve des théorèmes de validité et de cohérence et la preuve (beaucoup plus élaborée) du théorème de complétude de la logique propositionnelle intuitionniste par rapport aux modèles de Kripke. Le cours se termine par une introduction rapide aux systèmes de quantificateurs et à la logique prédicative.
Acquis d'apprentissage	**A la fin de cette unité d'enseignement, l'étudiant est capable de :** · Contribution du cours aux acquis d'apprentissage du programme de bachelier en sciences mathe#matiques : A la fin de cette activite#, l'e#tudiant.e aura progresse# dans sa capacite# a# : · Connaitre et comprendre un socle fondamental des mathe#matiques. · Choisir et utiliser des me#thodes et des outils fondamentaux de la logique pour re#soudre des proble#mes de formalisation en mathe#matique. · Reconna##tre les concepts fondamentaux de certaines the#ories mathe#matiques actuelles. · Etablir les liens principaux entre ces the#ories, les expliquer et les motiver par des exemples. · De#gager, gra#ce a# l'approche abstraite et expe#rimentale propre aux sciences exactes, les aspects unificateurs de situations et expe#riences diffe#rentes en mathe#matique. · Faire preuve d'abstraction et esprit critique. · Raisonner dans le cadre de la me#thode axiomatique. · Reconna##tre les arguments clef et la structure d'une de#monstration. · Construire et re#diger une de#monstration de façon autonome. · Appre#cier la rigueur d'un raisonnement mathe#matique et en de#celer les failles e#ventuelles. · Acquis d'apprentissage spe#cifiques au cours : A la fin de cette activite# , l'e#tudiant sera capable de: · Exprimer, en termes de re#gles d'infe#rence et d'axiomes, diffe#rents fragments de la logique propositionnelle, ainsi que utiliser les se#quents de Gentzen pour re#diger des preuves dans le cadre de la logique propositionnelle. · Etablir le lien entrer logique propositionnelle et treillis (et, plus spe#cifiquement, entre la logique intuitionniste et les alge#bres de Heyting, et entre la logique classique et les alge#bres de Boole). · Comprendre la signification des the#ore#mes de validite#, cohe#rence et comple#tude et exprimer ces the#ore#mes termes de mode#les. · Reconnaitre les grandes lignes de la preuve du the#ore#me de comple#tude de la logique intuitionniste par rapport aux mode# les de Kripke. · Formaliser les re#gles des syste#mes de quantificateurs en utilisant les adjonctions entre ensembles ordonne#s et les produits fibres.
Modes d'évaluation des acquis des étudiants	L'évaluation vise à tester la connaissance et la compréhension des notions, des exemples et des résultats fondamentaux, la capacité à construire un raisonnement cohérent, la maîtrise des techniques de démonstration introduites pendant le cours. L'évaluation consiste en un examen final. Chaque étudiant.e peut choisir entre examen oral et examen écrit. En tout cas, l'étudiant.e propose une première question qu'il ou elle développe et ensuite l'enseignant pose d'autres questions pour tester un spectre assez large de compétences. Pour établir la note finale, on tiendra compte de l'examen final et de la participation active au cours (questions posées, solutions des exercices présentées en classe).

Méthodes d'enseignement	Les activités d'apprentissage encadrées sont constituées de séances de cours magistral. La discussion collective et la résolution d'exercices par les étudiant.e.s sont intégrées dans le cours magistral. Le cours vise à introduire les concepts fondamentaux, à les motiver en montrant des exemples et en établissant des résultats, à montrer les liens avec d'autres cours du programme de bachelier en sciences mathématiques. La résolution d'exercices vise à apprendre les techniques de base du calcul des séquents, de la théorie des treillis et des adjonctions entre ensembles ordonnés.
Contenu	Cette activité vise à explorer la formalisation mathématique de la logique en termes de règles d'inférence (séquents), treillis (et, en particulier, algèbres de Heyting et de Boole), modèles (topologiques et de Kripke) et systèmes de quantificateurs (pour la logique prédicative). Les contenus suivants sont abordés dans le cadre du cours : - La logique propositionnelle, les séquents de Gentze, l'algèbre de Lindenbaum-Tarski. - Les treillis, les algèbres de Heyting et les algèbres de Boole. - Les modèles de la logique propositionnelle et les théorèmes de validité, cohérence et complétude. - Les théorèmes de représentations de Dedekind et de Stone, - Les idéaux et les filtres d'un ensemble ordonné, le lemme d'extension-exclusion et l'axiome du choix. - Les systèmes de quantificateurs et la logique prédicative.
Ressources en ligne	Site Moodle. Le site contient le syllabus du cours, y compris de nombreux exercices qui sont intégrés dans chaque chapitre.
Bibliographie	F. W. Lawvere, R. Rosebrugh, Sets for Mathematics, Cambridge University Press, 2003 S. Mac Lane, I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer 1992
Autres infos	Le cours est bisannuel et il sera activé en 2026-2027. Tout usage de l'intelligence artificielle dans le cadre de cette UA doit respecter les lignes directrices établies par la Faculté des sciences.
Faculté ou entité en charge:	MATH

Programmes / formations proposant cette unité d'enseignement (UE)

Intitulé du programme	Sigle	Crédits	Prérequis	Acquis d'apprentissage
Approfondissement en sciences mathématiques	APPMATH	5		
Mineure en mathématiques	MINMATH	5		
Master [120] en enseignement section 4 : mathématiques	MATH2M4	5		
Mineure en enseignement des mathématiques	APPENSMAT	5		