




5.00 crédits	30.0 h + 15.0 h	Q2
--------------	-----------------	----

Cette unité d'enseignement bisannuelle est dispensée en 2026-2027

Enseignants	Vitale Enrico ;
Langue d'enseignement	Français > English-friendly
Lieu du cours	Louvain-la-Neuve
Préalables	Il est recommandé que l'étudiant-e ait une bonne expérience des méthodes de base employées dans tout raisonnement mathématique, comme développées dans un cours de méthodologie, d'algèbre, d'analyse ou de géométrie de la première année du bachelier en mathématique ou en physique, ou un cours de mathématique de la première année de bachelier en sciences de l'ingénieur (toute spécialité confondue).
Thèmes abordés	Après une introduction naïve en termes de tables des valeurs de vérité, on définit la logique propositionnelle (généralisée, intuitionniste et classique) et l'algèbre de Lindenbaum-Tarski en utilisant le calcul des séquents à la Gentzen. Ensuite, on explore la version algébrique de la logique propositionnelle : les treillis, les algèbres de Heyting et les algèbres de Boole. On entre dans le vif du sujet avec la définition de la notion de modèle, la preuve des théorèmes de validité et de cohérence et la preuve (beaucoup plus élaborée) du théorème de complétude de la logique propositionnelle intuitionniste par rapport aux modèles de Kripke. Le cours se termine par une introduction rapide aux systèmes de quantificateurs et à la logique prédicative.
Acquis d'apprentissage	<p>A la fin de cette unité d'enseignement, l'étudiant est capable de :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Contribution du cours aux acquis d'apprentissage du programme de bachelier en sciences mathématiques : A la fin de cette activité, l'étudiant.e aura progressé dans sa capacité à : <ul style="list-style-type: none"> • Connaître et comprendre un socle fondamental des mathématiques. • Choisir et utiliser des méthodes et des outils fondamentaux de la logique pour résoudre des problèmes de formalisation en mathématique. • Reconnaître les concepts fondamentaux de certaines théories mathématiques actuelles. • Etablir les liens principaux entre ces théories, les expliquer et les motiver par des exemples. • Décrire, grâce à l'approche abstraite et expérimentale propre aux sciences exactes, les aspects unificateurs de situations et expériences différentes en mathématique. • Faire preuve d'abstraction et esprit critique. • Reasonner dans le cadre de la méthode axiomatique. • Reconnaître les arguments clef et la structure d'une démonstration. • Construire et rédiger une démonstration de façon autonome. • Appréhender la rigueur d'un raisonnement mathématique et en déceler les failles éventuelles. • Acquis d'apprentissage spécifiques au cours : A la fin de cette activité, l'étudiant sera capable de : <ul style="list-style-type: none"> • Exprimer, en termes de règles d'inférence et d'axiomes, différents fragments de la logique propositionnelle, ainsi que utiliser les séquents de Gentzen pour rédiger des preuves dans le cadre de la logique propositionnelle. • Etablir le lien entre la logique propositionnelle et treillis (et, plus spécifiquement, entre la logique intuitionniste et les algèbres de Heyting, et entre la logique classique et les algèbres de Boole). • Comprendre la signification des théorèmes de validité, cohérence et complétude et exprimer ces théorèmes en termes de modèles. • Reconnaître les grandes lignes de la preuve du théorème de complétude de la logique intuitionniste par rapport aux modèles de Kripke. • Formaliser les règles des systèmes de quantificateurs en utilisant les adjonctions entre ensembles ordonnés et les produits fibres.
Modes d'évaluation des acquis des étudiants	L'évaluation vise à tester la connaissance et la compréhension des notions, des exemples et des résultats fondamentaux, la capacité à construire un raisonnement cohérent, la maîtrise des techniques de démonstration introduites pendant le cours. L'évaluation consiste en un examen final. Chaque étudiant.e peut choisir entre examen oral et examen écrit. En tout cas, l'étudiant.e propose une première question qu'il ou elle développe et ensuite l'enseignant pose d'autres questions pour tester un spectre assez large de compétences. Pour établir la note finale, on tiendra compte de l'examen final et de la participation active au cours (questions posées, solutions des exercices présentées en classe).

Méthodes d'enseignement	Les activités d'apprentissage encadrées sont constituées de séances de cours magistral. La discussion collective et la résolution d'exercices par les étudiant.e.s sont intégrées dans le cours magistral. Le cours vise à introduire les concepts fondamentaux, à les motiver en montrant des exemples et en établissant des résultats, à montrer les liens avec d'autres cours du programme de bachelier en sciences mathématiques. La résolution d'exercices vise à apprendre les techniques de base du calcul des séquents, de la théorie des treillis et des adjonctions entre ensembles ordonnés.
Contenu	Cette activité vise à explorer la formalisation mathématique de la logique en termes de règles d'inférence (séquents), treillis (et, en particulier, algèbres de Heyting et de Boole), modèles (topologiques et de Kripke) et systèmes de quantificateurs (pour la logique prédicative). Les contenus suivants sont abordés dans le cadre du cours : <ul style="list-style-type: none"> - La logique propositionnelle, les séquents de Gentze, l'algèbre de Lindenbaum-Tarski. - Les treillis, les algèbres de Heyting et les algèbres de Boole. - Les modèles de la logique propositionnelle et les théorèmes de validité, cohérence et complétude. - Les théorèmes de représentations de Dedekind et de Stone, - Les idéaux et les filtres d'un ensemble ordonné, le lemme d'extension-exclusion et l'axiome du choix. - Les systèmes de quantificateurs et la logique prédicative.
Ressources en ligne	Site Moodle. Le site contient le syllabus du cours, y compris de nombreux exercices qui sont intégrés dans chaque chapitre.
Bibliographie	F. W. Lawvere, R. Rosebrugh, Sets for Mathematics, Cambridge University Press, 2003 S. Mac Lane, I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer 1992
Autres infos	Le cours est bisannuel et il sera activé en 2024-2025.
Faculté ou entité en charge:	MATH

Programmes / formations proposant cette unité d'enseignement (UE)				
Intitulé du programme	Sigle	Crédits	Prérequis	Acquis d'apprentissage
Approfondissement en sciences mathématiques	APPMATH	5		
Mineure en mathématiques	MINMATH	5		
Master [120] en enseignement section 4 : mathématiques	MATH2M4	5		
Mineure en enseignement des mathématiques	APPENSMAT	5		