

Informations importantes:

- Les calculatrices, téléphones portables, montres connectées et instruments similaires sont strictement interdits.
- Inscrivez vos NOM (en majuscules), Prénom et Numéro sur la première page; et seulement votre NOM sur les autres.
- Ne dégrafez pas les feuilles du questionnaire.
- Les cadres sont pour les réponses finales et les développements présentées de façon claire et lisible. Il convient donc parfois de faire un brouillon avant de recopier votre réponse dans un cadre.
- Lorsqu'une question comporte un cadre pour la réponse finale et un cadre pour le développement, il est attendu que vous indiquiez à la fois votre réponse finale et votre développement dans ces cadres. Une réponse finale sans développement ou un développement sans réponse finale ne seront pas acceptés.
- Si vous avez besoin de plus de place, (i) utilisez le CADRE DE LA DERNIERE PAGE et (ii) indiquez le clairement dans le bas du cadre initialement prévu pour la réponse.

Convention de notation: Nous utilisons e^x ou $\exp(x)$ pour la fonction exponentielle, $\tan(x)$ pour la fonction tangente, $\ln(x)$ pour le logarithme Népérien, $\sin^2(x)$ pour le carré de $\sin(x)$ (et idem pour les autres fonctions).

Question 1: Étude de fonction

On considère la fonction $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (1 - x^2) \ln(1 - x) + x .$$

Aide: $\lim_{y \rightarrow 0} y \ln(y) = 0$, $\ln(2) \simeq 0,6931$ et $e^{-1/2} \simeq 0,6065$.

a) Obtenez le domaine de définition $\mathbb{D}$ de la fonction f .

b) Obtenez $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

c) Obtenez la dérivée première f' . Obtenez aussi la/les racine(s) de f' s'il y en a.

d) Obtenez la dérivée seconde f'' .

Question 2: Problème

Une entreprise de transport maritime livre du matériel du port d'Anvers vers le port de Marseille. Le coût énergétique, C_E , de ce transport augmente quadratiquement en fonction de la vitesse, V , du bateau: $C_E = aV^2$. Le coût total C_{total} comprend aussi un coût C_T qui ne dépend pas de la vitesse, mais est linéairement proportionnel au temps du voyage, T (salaires, amortissement du matériel naviguant).

Le **premier voyage** coûte 5 millions d'Euros pour une vitesse de 20 noeuds (environ 37,5 km/h), avec $C_E = C_T/2$. Sachant que la distance à parcourir, D , est de 2300 milles nautiques, en contournant France et Espagne par le détroit de Gibraltar, et que la distance est le produit du temps par la vitesse, la vitesse du bateau, $V = 20$ noeuds, était-elle optimale ? Quelle est cette vitesse optimale V_{opt1} ?

Pour un **second voyage**, les paramètres des coûts ont été réduits (réduction de la traînée du bateau et des salaires ...), tout en conservant le caractère quadratique de C_E par rapport à V et la proportionalité de C_T par rapport à T : le coût total est de 4 millions d'euros pour cette même vitesse de 20 noeuds. Le trajet reviendrait à 17/3 millions d'euros pour une vitesse de 10 noeuds. Quelle est la vitesse optimale V_{opt2} ?

Dans les deux cas, expliquez votre démarche en détail.

(1) $V_{\text{opt1}} = \dots\dots\dots$ noeuds

(2) $V_{\text{opt2}} = \dots\dots\dots$ noeuds

Développement

Développement (suite)

Question 3: PrimitiveObtenez une primitive $g(x) = \int \frac{x^5}{(x^2+1)^5} dx$. $g(x) =$

Développement

Question 4: Solide de révolution

Des archéologues ont effectué une fantastique découverte: un oeuf gigantesque fossilisé. Ils appellent un.e ingénieur.e pour en évaluer le volume, V_{oeuf} . Cet.te ingénieur.e observe qu'il s'agit d'un solide de révolution, mesure la hauteur maximale H de cet oeuf dressé pointe vers le haut, mesure le rayon horizontal $R(h)$ selon la hauteur h (celle-ci varie donc de 0 à H) et trouve $R(h) = A\sqrt{\sin(\pi h/H) + \frac{1}{4}\sin(2\pi h/H)}$. Cela lui permet de déduire V_{oeuf} d'abord sous forme d'une formule, puis en utilisant les valeurs numériques mesurées suivantes : $H=1,00$ m (mètre) et $A=0,50$ m. Saurez-vous faire de même?

Ensuite, l'ingénieur.e compare V_{oeuf} avec le volume d'une sphère de rayon 0,50 m. Que vaut $V_{\text{sphère}}$ avec deux chiffres significatifs? L'oeuf est-il plus ou moins volumineux que la sphère?

$V_{\text{oeuf}} = \dots\dots\dots$ (formule) = $\dots\dots\dots$ m³

$V_{\text{sphère}} = \dots\dots\dots$ m³

L'oeuf est plus / moins volumineux que la sphère (barrer la mention incorrecte)

Développement

Développement (suite)

Cadre supplémentaire si nécessaire. Veuillez à bien préciser la/les questions.

Informations importantes:

- Les calculatrices, téléphones portables, montres connectées et instruments similaires sont strictement interdits.
- Inscrivez vos NOM (en majuscules), Prénom et Numéro sur la première page; et seulement votre NOM sur les autres.
- Ne dégrafez pas les feuilles du questionnaire.
- Les cadres sont pour les réponses finales et les développements présentées de façon claire et lisible. Il convient donc parfois de faire un brouillon avant de recopier votre réponse dans un cadre.
- Lorsqu'une question comporte un cadre pour la réponse finale et un cadre pour le développement, il est attendu que vous indiquiez à la fois votre réponse finale et votre développement dans ces cadres. Une réponse finale sans développement ou un développement sans réponse finale ne seront pas acceptés.
- Si vous avez besoin de plus de place, (i) utilisez le CADRE DE LA DERNIERE PAGE et (ii) indiquez le clairement dans le bas du cadre initialement prévu pour la réponse.

Convention de notation: Nous utilisons e^x ou $\exp(x)$ pour la fonction exponentielle, $\ln(x)$ pour le logarithme Népérien, $\sin^2(x)$ pour le carré de $\sin(x)$ (et idem pour les autres fonctions).

Question 1: Étude de fonction

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2} \right).$$

Aide: $\lim_{y \rightarrow 0} y^p \ln(y) = 0$ pour $p > 0$; $e^{-2} \simeq 0,135$

a) Obtenez $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (le faire en détail; pas juste donner la réponse !).

b) Obtenez la dérivée première f' . Obtenez alors la/les racine(s) de f' s'il y en a, ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ si elle existe (le faire en détail).

c) Obtenez la dérivée seconde f'' . Obtenez alors la/les racine(s) de f'' s'il y en a, ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x)$ si elle existe (le faire en détail).

Question 2: Problème

Une agricultrice dispose de 200 mètres de clôture pour délimiter un enclos rectangulaire adossé à un mur rectiligne. Le mur constitue l'un des côtés du rectangle et ne nécessite donc pas de clôture. Elle désire que l'enclos soit le plus grand possible. Pour cela, que devraient être la longueur L (parallèle au mur) de l'enclos, et sa largeur l (perpendiculaire au mur)? Dès lors quelle sera son aire $A_{\text{rectangle}}$ (aussi exprimée en hectare)?

L'agricultrice prend le temps de réfléchir, et se dit qu'elle pourrait économiser le coût d'un pieu si elle faisait plutôt un enclos triangulaire, de nouveau en maximisant l'aire de cet enclos. En supposant qu'il s'agit d'un triangle isocèle dont la base est le mur, quelle est la longueur au niveau du mur (la base b du triangle), et à quelle distance du mur le point le plus éloigné se situe-t-il (la hauteur h du triangle)? Dès lors quelle sera son aire A_{triangle} (aussi exprimée en hectare)? En tenant compte de l'économie d'un pieu, l'agricultrice a-t-elle intérêt à choisir le rectangle ou le triangle ?

Dans les deux cas, expliquez votre démarche en détail.

Aide : $\sqrt{1/2} \simeq 0,7071$. Dans le cas triangulaire, ne vérifiez pas le résultat par le calcul de la dérivée seconde.

$l = \dots\dots$ m

$L = \dots\dots$ m

$A_{\text{rectangle}} = \dots\dots$ m² = $\dots\dots$ ha

$b = \dots\dots$ m

$h = \dots\dots$ m

$A_{\text{triangle}} = \dots\dots$ m² = $\dots\dots$ ha

Sélectionnez : il faut choisir le rectangle / le triangle

Développement

Développement (suite)

Question 3: Primitive

Obtenez une primitive $g(x) = \int \left(\tan(x) - \frac{\sin(x)}{\sin(\cos(x))} \right) dx$ **Aide:** $\frac{2}{(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{(1+t)}$

 $g(x) =$

Développement

Question 4: Théorie et application

La fonction de Lambert, notée $W_0(y)$, est la réciproque de la fonction $f(x) = x e^x$ pour les valeurs de x dans l'intervalle $I = [-1, +\infty[$: c'est-à-dire que $W_0(y) = x$ lorsque $y = x e^x$. On a donc aussi que $W_0(y) e^{W_0(y)} = y$.

- Que valent $W_0(0)$, $W_0(e)$ et $W_0(-e^{-1})$? **Aide:** Considérez la valeur de la fonction $f(x)$ pour quelques valeurs simples de son argument.
- La fonction $W_0(y)$ est-elle (strictement) croissante ou (strictement) décroissante ? Pourquoi ?
- Quel est le domaine de définition de $W_0(y)$?
- La fonction $W_0(y)$ est-elle continue dans son domaine de définition ? Pourquoi ?
- Obtenez la dérivée $W'_0(y)$ de la fonction $W_0(y)$. Que valent $W'_0(0)$ et $W'_0(e)$?
- La dérivée de $W_0(y)$ existe-t-elle en $y = -e^{-1}$? Pourquoi ?

$W_0(0) = \dots$

$W_0(e) = \dots$

$W_0(-e^{-1}) = \dots$

Sélectionnez: $W_0(y)$ est (strictement) croissante / (strictement) décroissante

Le domaine de définition de $W_0(y)$ est

Sélectionnez: $W_0(y)$ est / n'est pas continue

$W'_0(y) = \dots$

$W'_0(0) = \dots$

$W'_0(e) = \dots$

Sélectionnez: $W'_0(-e^{-1})$ existe / n'existe pas

Développement

Développement (suite)

Cadre supplémentaire si nécessaire. Veuillez à bien préciser la/les questions.