

Instructions à lire attentivement avant de commencer.

La partie « Algèbre » de l'examen d'admission comporte 3 questions et se déroule en 2h30. Toutes les questions sont fournies au lancement de l'examen.

La calculatrice est interdite.

La question 1 comporte 7 sous-questions. **Votre réponse (et uniquement votre réponse) doit tenir dans le cadre** indiqué à la suite de la question. Ne fournissez aucune justification à vos réponses pour cette question 1 !

Pour les autres questions, par contre, expliquez soigneusement votre raisonnement.

N'oubliez pas d'indiquer vos nom, prénom et numéro sur **chaque feuille** et utilisez des lettres capitales (soit JOHN SMITH au lieu de John Smith).

Bon examen !

1.1. Trouvez tous les réels x tels que $2^x + 2^{3-x} = 6$.

Solution :

$2^{3-x} = \frac{8}{2^x}$. Avec $t = 2^x > 0$: $t + \frac{8}{t} = 6 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 4) = 0 \Rightarrow t = 2$ ou $t = 4$. Donc $2^x = 2$ ou $2^x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 1 \text{ ou } x = 2}$.

1.2. Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$$

Solution :

La racine impose $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \geq 0$, c'est-à-dire $\frac{x-1}{x+2} \geq 1$ (ce qui garantit aussi la positivité de l'argument du $\ln$).

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+2} - 1 &\geq 0 \\ \frac{(x-1) - (x+2)}{x+2} &\geq 0 \\ \frac{-3}{x+2} &\geq 0 \end{aligned}$$

Le numérateur -3 étant négatif, il faut $x+2 < 0$:

$$S =] - \infty, -2[$$

Suite de la question 1 au verso.

1.3. Donnez la forme cartésienne de $(1 + i)^{10}$, où i est l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$.

Solution :

$$(1 + i)^2 = 2i, \text{ donc } (1 + i)^{10} = (2i)^5 = 32i^5 = \boxed{32i}.$$

1.4. On tire simultanément 2 cartes d'un jeu complet de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir deux as ? Exprimez le résultat sous forme fractionnaire réduite.

Solution :

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{6}{1\,326} = \boxed{\frac{1}{221}}.$$

1.5. Déterminer le coefficient du terme en x^2 dans le développement de :

$$(x + 2)^6$$

Solution :

Le terme général est

$$\binom{6}{k} x^k 2^{6-k}.$$

Pour $k = 2$ le coefficient recherché est donc

$$\binom{6}{2} 2^4 = 15 \times 16 = 240.$$

Réponse : $\boxed{240}$.

1.6. Déterminer la valeur des coefficients réels a et b pour que le polynôme $P(x) = x^4 + ax + b$ soit divisible par $Q(x) = x^2 + x + 2$.

Solution :

La division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ donne

$$P(x) = (x^2 - x - 1)Q(x) + (a + 3)x + (b + 2).$$

Le reste s'annule donc pour $a = -3$ et $b = -2$.

Réponse : $\boxed{a = -3 \quad b = -2}$.

1.7. Lors d'un concours, le premier classé reçoit un prix de 5 000€ et les suivants reçoivent chacun un prix égal au $3/5$ du précédent (donc 3 000€, 1 800€, ...). Calculez le montant total des prix pour les cinq premiers (sachant que $6^5 = 7\,776$).

Solution

Le prix total est

$$5\,000 \cdot \frac{1 - (3/5)^5}{1 - (3/5)} = 5\,000 \cdot \frac{1 - 0.07776}{0.4} = 46\,112/4 = 11\,528$$

Réponse : $\boxed{11\,528}$

Nom :

Prénom :

Numéro :

--	--	--	--

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant selon le paramètre réel positif $m > 0$, l'inéquation :

$$\frac{x-m}{x^3-x} > 0$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution :

1. Domaine de définition

On factorise le dénominateur :

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1).$$

L'inéquation peut donc s'écrire

$$\frac{x-m}{x(x-1)(x+1)} > 0.$$

Le dénominateur s'annule pour

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

Ces trois valeurs sont interdites. Le domaine de définition est donc

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Le numérateur s'annule lorsque

$$x = m.$$

Comme l'inégalité est stricte, la valeur $x = m$ ne peut pas être solution.

2. Signe du dénominateur

Étudions le signe de

$$x(x-1)(x+1).$$

Ses trois racines -1 , 0 et 1 sont simples. Son signe change donc à chacune de ces valeurs :

x	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 0[$	0	$] 0, 1[$	1	$] 1, +\infty[$
$\frac{x}{x(x-1)(x+1)}$	-	0	+	0	-	0	+

Par ailleurs,

$$x - m < 0 \quad \text{si } x < m, \quad x - m = 0 \quad \text{si } x = m, \quad x - m > 0 \quad \text{si } x > m.$$

Puisque $m \in \mathbb{R}_0^+$, on a $m > 0$. Il faut donc distinguer les trois cas

$$0 < m < 1, \quad m = 1, \quad m > 1.$$

3. Discussion suivant le paramètre m

Premier cas : $0 < m < 1$

Les valeurs critiques sont ordonnées de la manière suivante :

$$-1 < 0 < m < 1.$$

On obtient le tableau de signes :

x	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 0[$	0	$] 0, m[$	m	$] m, 1[$	1	$] 1, +\infty[$
$x - m$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x(x-1)(x+1)$	-	0	+	0	-	-	-	0	+
$\frac{x-m}{x(x-1)(x+1)}$	+	×	-	×	+	0	-	×	+

La fraction est strictement positive sur

$$]-\infty, -1[, \quad]0, m[, \quad]1, +\infty[.$$

Par conséquent,

$$S =]-\infty, -1[\cup]0, m[\cup]1, +\infty[$$

Deuxième cas : $m = 1$

L'inéquation devient

$$\frac{x-1}{x(x-1)(x+1)} > 0.$$

Pour $x \neq 1$, on peut simplifier le facteur $x-1$:

$$\frac{1}{x(x+1)} > 0.$$

Il faut toutefois conserver la restriction

$$x \neq 1,$$

car $x = 1$ annule le dénominateur de l'expression initiale.

Le numérateur étant strictement positif, il suffit d'étudier

$$x(x+1) > 0.$$

Un produit de deux facteurs est positif lorsque ses deux facteurs sont de même signe. On obtient

$$x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 0.$$

Ainsi, avant de tenir compte de la valeur interdite $x = 1$,

$$x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

Comme $x = 1$ est interdit, il faut scinder le second intervalle :

$$S =]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

Troisième cas : $m > 1$

Les valeurs critiques sont maintenant ordonnées comme suit :

$$-1 < 0 < 1 < m.$$

Le tableau de signes est

x	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 0[$	0	$] 0, 1[$	1	$] 1, m[$	m	$] m, +\infty[$
$x - m$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x(x-1)(x+1)$	-	0	+	0	-	0	+	+	+
$\frac{x-m}{x(x-1)(x+1)}$	+	$\times$	-	$\times$	+	$\times$	-	0	+

La fraction est strictement positive sur

$$]-\infty, -1[, \quad]0, 1[, \quad]m, +\infty[.$$

Par conséquent,

$$S =]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]m, +\infty[$$

4. Conclusion

Les solutions de l'inéquation

$$\frac{x-m}{x^3-x} > 0, \quad m \in \mathbb{R}_0^+,$$

sont donc

Valeur de m	Ensemble des solutions S
$0 < m < 1$	$] -\infty, -1[\cup]0, m[\cup]1, +\infty[$
$m = 1$	$] -\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$
$m > 1$	$] -\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]m, +\infty[$

Les valeurs -1 , 0 et 1 sont toujours exclues puisqu'elles annulent le dénominateur. La valeur $x = m$ est également exclue : si $m \neq 1$, elle annule le numérateur et ne vérifie donc pas l'inégalité stricte ; si $m = 1$, elle correspond déjà à une valeur interdite du domaine de définition.

Nom :

Prénom :

Numéro :

--	--	--	--

3. Le bois de Lauzelle à Louvain-la-Neuve est en feu. Les camions de l'*Escadrille de Pompiers de Louvain* se relaient pour combattre l'incendie, assistés par des agriculteurs venus avec leurs citernes et par l'hélicoptère « Charlie » de la Protection civile. Tous ces véhicules viennent puiser leur eau dans le lac de Louvain-la-Neuve avant de la déverser sur le feu. À l'issue de l'opération, $1\,060\text{ m}^3$ d'eau ont été prélevés dans le lac au cours de 149 passages de véhicules.

Laurent observe ce manège et s'interroge sur la capacité des différents véhicules. Il rassemble les informations suivantes :

- durant la journée, les passages des camions de pompiers ont été trois fois plus nombreux que ceux des citernes agricoles ;
- durant la nuit qui a suivi, les agriculteurs ont cessé leurs rotations, tandis que les camions de pompiers ont encore effectué seize passages ;
- Laurent a mesuré que le débit d'arrosage d'une citerne agricole était deux fois celui d'un camion de pompiers, mais qu'une citerne se vidait trois fois plus rapidement qu'un camion ;
- « Charlie » a effectué cinq passages et, au total, ceux-ci ont emporté autant d'eau que huit passages de camions de pompiers.

On suppose que chaque véhicule d'un même type prélève sa capacité complète à chacun de ses passages.

Déterminez :

- (1) le nombre de passages effectués par les camions de pompiers et celui des citernes agricoles ;
- (2) la capacité, en m^3 , d'un camion de pompiers, d'une citerne agricole et de l'hélicoptère.

Rapportez vos réponses finales dans les cases appropriées ci-dessous.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution :

1. Nombre de passages des différents véhicules.

Notons a le nombre de passages effectués par les citernes agricoles durant la journée.

D'après l'énoncé, les camions de pompiers ont effectué, durant la journée, trois fois plus de passages que les citernes agricoles. Leur nombre de passages durant la journée est donc

$$3a.$$

Durant la nuit, les agriculteurs ont cessé leurs rotations, tandis que les camions de pompiers ont encore effectué 16 passages.

Enfin, l'hélicoptère a effectué 5 passages.

Le nombre total de passages étant égal à 149, on obtient

$$a + 3a + 16 + 5 = 149.$$

Ainsi,

$$4a + 21 = 149,$$

d'où

$$4a = 128$$

et finalement

$$\boxed{a = 32}.$$

Les citernes agricoles ont donc effectué

$$\boxed{32 \text{ passages}}.$$

Les camions de pompiers ont effectué durant la journée

$$3 \times 32 = 96$$

passages, auxquels s'ajoutent les 16 passages effectués durant la nuit.

Le nombre total de passages des camions vaut donc

$$96 + 16 = 112.$$

Ainsi,

$$\boxed{112 \text{ passages de camions de pompiers.}}$$

On vérifie bien que

$$112 + 32 + 5 = 149.$$

2. Capacité des différents véhicules.

Notons

$$C$$

la capacité, en m^3 , d'un camion de pompiers.

Capacité d'une citerne agricole.

Notons q le débit d'arrosage d'un camion et t le temps nécessaire pour vider complètement celui-ci. Sa capacité est alors

$$C = qt.$$

D'après l'énoncé, le débit d'une citerne agricole est deux fois plus important. Il vaut donc

$$2q.$$

Mais la citerne se vide trois fois plus rapidement que le camion. Son temps de vidange est donc

$$\frac{t}{3}.$$

Si l'on note A la capacité d'une citerne agricole, on obtient

$$A = (2q)\frac{t}{3}.$$

Ainsi,

$$A = \frac{2}{3}qt.$$

Comme $qt = C$, il vient

$$\boxed{A = \frac{2}{3}C}.$$

Capacité de l'hélicoptère.

Notons H la capacité de l'hélicoptère.

Les 5 passages de l'hélicoptère ont emporté autant d'eau que 8 passages de camions. On a donc

$$5H = 8C.$$

Par conséquent,

$$\boxed{H = \frac{8}{5}C}.$$

Utilisation du volume total prélevé.

Au total, $1\,060 \text{ m}^3$ d'eau ont été prélevés dans le lac.

Les 112 passages des camions représentent un volume

$$112C.$$

Les 32 passages des citernes agricoles représentent

$$32A.$$

Les 5 passages de l'hélicoptère représentent

$$5H.$$

On a donc

$$112C + 32A + 5H = 1\,060.$$

Nom :

Prénom :

Numéro :

--	--	--	--

En utilisant

$$A = \frac{2}{3}C \quad \text{et} \quad H = \frac{8}{5}C,$$

on obtient

$$112C + 32\left(\frac{2}{3}C\right) + 5\left(\frac{8}{5}C\right) = 1\,060.$$

Ainsi,

$$112C + \frac{64}{3}C + 8C = 1\,060.$$

En réduisant au même dénominateur,

$$\left(\frac{336}{3} + \frac{64}{3} + \frac{24}{3}\right)C = 1\,060,$$

soit

$$\frac{424}{3}C = 1\,060.$$

Il vient donc

$$C = 1\,060 \frac{3}{424} = \frac{3\,180}{424} = 7,5.$$

La capacité d'un camion de pompiers est donc

$$C = 7,5 \text{ m}^3.$$

La capacité d'une citerne agricole vaut

$$A = \frac{2}{3} \times 7,5 = 5,$$

soit

$$A = 5 \text{ m}^3.$$

Enfin, la capacité de l'hélicoptère vaut

$$H = \frac{8}{5} \times 7,5 = 12,$$

soit

$$H = 12 \text{ m}^3.$$

Contrôle :

Le volume prélevé par les camions est

$$112 \times 7,5 = 840 \text{ m}^3.$$

Celui prélevé par les citernes agricoles est

$$32 \times 5 = 160 \text{ m}^3.$$

Enfin, celui prélevé par l'hélicoptère est

$$5 \times 12 = 60 \text{ m}^3.$$

On retrouve bien

$$840 + 160 + 60 = 1\,060 \text{ m}^3.$$

Réponses.

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none">112 passages de camions de pompiers et 32 passages de citernes agricoles,camion de pompiers : $7,5 \text{ m}^3$,
citerne agricole : 5 m^3,
hélicoptère : 12 m^3. |
|--|