

Informations importantes:

- Les calculatrices, téléphones portables, montres connectées et instruments similaires sont strictement interdits.
- Inscrivez vos NOM (en majuscules), Prénom et Numéro sur la première page; et seulement votre NOM sur les autres.
- Ne dégrafez pas les feuilles du questionnaire.
- Les cadres sont pour les réponses finales et les développements présentées de façon claire et lisible. Il convient donc parfois de faire un brouillon avant de recopier votre réponse dans un cadre.
- Lorsqu'une question comporte un cadre pour la réponse finale et un cadre pour le développement, il est attendu que vous indiquiez à la fois votre réponse finale et votre développement dans ces cadres. Une réponse finale sans développement ou un développement sans réponse finale ne seront pas acceptés.
- Si vous avez besoin de plus de place, (i) utilisez le CADRE DE LA DERNIERE PAGE et (ii) indiquez le clairement dans le bas du cadre initialement prévu pour la réponse.

Convention de notation: Nous utilisons e^x ou $\exp(x)$ pour la fonction exponentielle, $\ln(x)$ pour le logarithme Népérien, $\sin^2(x)$ pour le carré de $\sin(x)$ (et idem pour les autres fonctions).

Question 1: Étude de fonction

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2} \right).$$

Aide: $\lim_{y \rightarrow 0} y^p \ln(y) = 0$ pour $p > 0$; $e^{-2} \simeq 0,135$

a) Obtenez $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (le faire en détail; pas juste donner la réponse !).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x))^2 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(x)) + \frac{1}{4} (0) \\ &= \frac{1}{2} (0)(0) - \frac{1}{2} (0) + \frac{1}{4} (0) = 0 \quad \text{avec l'aide } p=1 \text{ et } p=2 \end{aligned}$$

b) Obtenez la dérivée première f' . Obtenez alors la/les racine(s) de f' s'il y en a, ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ si elle existe (le faire en détail).

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^2}{2} \left(2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) \\ &= x \ln^2(x) - \cancel{x \ln(x)} + \cancel{\frac{x}{2}} + \cancel{x \ln x} - \cancel{\frac{x}{2}} = x \ln^2(x) \quad \text{simple!} \end{aligned}$$

racine: en $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Aussi: $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^{1/2} \ln(x))^2 = (0)(0) = 0$
avec l'aide $p = \frac{1}{2}$

c) Obtenez la dérivée seconde f'' . Obtenez alors la/les racine(s) de f'' s'il y en a, ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x)$ si elle existe (le faire en détail).

$$\begin{aligned} f''(x) &= (1)(\ln^2(x)) + (x) \left(2 \ln(x) \frac{1}{x} \right) = \ln^2(x) + 2 \ln(x) \\ &= \ln(x) (\ln(x) + 2) \end{aligned}$$

racines: en $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

et en $\ln(x) = -2 \Leftrightarrow \boxed{x = e^{-2} \simeq 0,135}$ avec l'aide

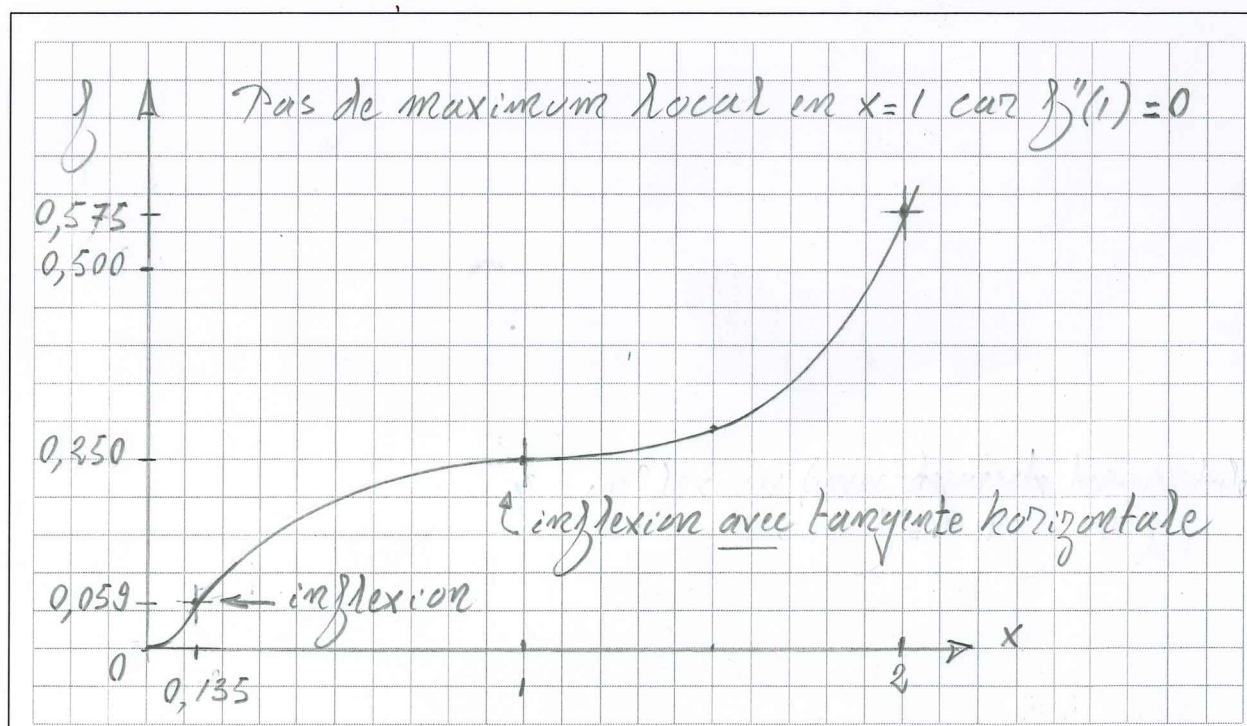
Aussi: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) (\ln(x) + 2) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$

d) Réalisez le **tableau de variation de la fonction** en utilisant un ordre logique présentant d'abord f' , puis f'' , pour enfin conclure sur les variations de f : avec indication des zones de croissance, décroissance, et signe de la concavité. La limite $x \rightarrow 0$ ainsi que la(les) valeur(s) remarquable(s) de x qui annule(nt) f' et/ou f'' doivent apparaître dans le tableau! Pour chacune, fournir les valeurs numériques approximatives de f' , f'' et f .

X	limite	0		$e^{-2} \approx 0,135$		1	
f'	0	+		$(e^{-2})(-2)^2 \approx 0,540$	+	0	+
f''	∞	+		0	-	0	+
f	0	+		$(e^{-2})/(13/4) \approx 0,059$ inflexion	+	$1/4 = 0,250$ inflexion	+

note: $f(e^{-2}) = \frac{(e^{-2})^2}{2}((-2)^2 - (-2) + \frac{1}{2}) \approx (0,135)^2(\frac{13}{4}) \approx 0,059$ (0,06 OK!)

e) Sur base des résultats précédents, esquissez proprement, avec des axes chiffrés, le graphe de la fonction f pour $x \leq 2$. Bien indiquer la position des points remarquables (extremum/ma, point(s) d'inflexion, racine(s)), et d'asymptote(s); s'il y en a, et avec la bonne valeur approximative de f en chaque point remarquable. **Aide:** $f(2) \approx 0,575$.



Question 2: Problème

Une agricultrice dispose de 200 mètres de clôture pour délimiter un enclos rectangulaire adossé à un mur rectiligne. Le mur constitue l'un des côtés du rectangle et ne nécessite donc pas de clôture. Elle désire que l'enclos soit le plus grand possible. Pour cela, que devraient être la longueur L (parallèle au mur) de l'enclos, et sa largeur l (perpendiculaire au mur)? Dès lors quelle sera son aire $A_{\text{rectangle}}$ (aussi exprimée en hectare)?

L'agricultrice prend le temps de réfléchir, et se dit qu'elle pourrait économiser le coût d'un pieu si elle faisait plutôt un enclos triangulaire, de nouveau en maximisant l'aire de cet enclos. En supposant qu'il s'agit d'un triangle isocèle dont la base est le mur, quelle est la longueur au niveau du mur (la base b du triangle), et à quelle distance du mur le point le plus éloigné se situe-t-il (la hauteur h du triangle)? Dès lors quelle sera son aire A_{triangle} (aussi exprimée en hectare)? En tenant compte de l'économie d'un pieu, l'agricultrice a-t-elle intérêt à choisir le rectangle ou le triangle ?

Dans les deux cas, expliquez votre démarche en détail.

Aide : $\sqrt{1/2} \simeq 0,7071$. Dans le cas triangulaire, ne vérifiez pas le résultat par le calcul de la dérivée seconde.

$$\begin{array}{lll} l = \text{..50.. m} & L = \text{..100.. m} & A_{\text{rectangle}} = \text{..5000.. m}^2 = \text{..0,5.. ha} \\ b = \text{..141,42.. m} & h = \text{..70,71.. m} & A_{\text{triangle}} = \text{..5000.. m}^2 = \text{..0,5.. ha} \end{array}$$

Sélectionnez : il faut choisir le rectangle / le triangle

Développement

Soit $C=200$ m la longueur de la clôture. Dans le cas du rectangle, nous avons

$$C = L + 2l \quad \text{et} \quad A_{\text{rectangle}} = L.l, \quad (1)$$

ce qui donne

$$L = C - 2l \quad \text{et} \quad A_{\text{rectangle}} = (C - 2l)l. \quad (2)$$

Il s'agit de maximiser $A_{\text{rectangle}}$ par rapport à l , c'est-à-dire qu'il faut trouver l tel que $\frac{dA_{\text{rectangle}}}{dl} = 0$, pour autant que la dérivée seconde de l'aire soit négative pour cette valeur de l . La dérivée de l'aire vaut

$$\frac{dA_{\text{rectangle}}}{dl} = C - 4l. \quad (3)$$

La dérivée seconde vaut -4, toujours négative. En annulant l'équation (3), on obtient

$$l = C/4 = 50 \text{ m} \quad \text{et l'équation (2) donne} \quad L = C - 2l = 100 \text{ m}, \quad (4)$$

soit $A_{\text{rectangle}} = (C - 2l)l = C^2/8 = 5000 \text{ m}^2 = 0,5 \text{ ha}$ (car $1 \text{ ha} = 10000 \text{ m}^2$).

Alternativement, on peut éliminer l au lieu de L dans l'équation (2), avec les mêmes résultats.

Développement (suite)

Dans le cas du triangle, nous avons:

$$A_{\text{triangle}} = \frac{1}{2}bh. \quad (5)$$

La longueur de chacun des deux côtés latéraux du triangle isocèle peut être obtenue par la relation de Pythagore appliquée au triangle rectangle partant de la moitié de la base du triangle isocèle. Donc,

$$\left(\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2, \quad \text{soit} \quad h = \left(\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{1/2} \quad (6)$$

L'aire du triangle est donc

$$A_{\text{triangle}} = \frac{1}{2}b \left(\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{1/2}. \quad (7)$$

Il s'agit de maximiser A_{triangle} par rapport à b , selon le même principe que dans le cas rectangulaire. La dérivée de l'aire vaut

$$\frac{dA_{\text{triangle}}}{db} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{1/2} + \frac{1}{2}b \left(\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{-1/2} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-b}{2}\right) \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{C}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)^2\right) \left(\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{-1/2}. \quad (9)$$

Elle s'annule lorsque son premier facteur $(C/2)^2 - 2(b/2)^2$ s'annule, c'est-à-dire pour

$$b = \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2} = \sqrt{20000} \approx 141,42 \text{ m}. \quad (10)$$

Par l'équation (6) on obtient

$$h = \frac{C}{2\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2} = \sqrt{5000} \approx 70,71 \text{ m}, \quad (11)$$

et donc

$$A_{\text{triangle}} = C^2/8 = 5000 \text{ m}^2 = 0,5 \text{ ha}, \quad (12)$$

comme dans le cas rectangulaire. Les deux aires sont donc égales. Toutefois, l'économie d'un pieu favorise la solution triangulaire ...

Développement (suite)

Il existe des méthodes alternatives de résolution, dont certaines ne font même pas appel à l'analyse mathématique ...

Méthode 2. En particulier, il est possible d'éliminer b plutôt que h à partir de la relation de Pythagore, $b = 2\sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - h^2}$. L'aire du triangle est donc

$$A_{\text{triangle}} = h\sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - h^2}. \quad (13)$$

La dérivée vaut

$$\frac{dA_{\text{triangle}}}{dh} = \sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - h^2}} = \frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - 2h^2}{\sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - h^2}}. \quad (14)$$

Elle s'annule lorsque le numérateur $(C/2)^2 - 2h^2$ s'annule, ce qui donne les mêmes résultats pour h et b que précédemment.

Méthode 3. On peut également trouver b (et h) en maximisant le *carré* de l'aire. En effet, si l'aire est maximale, son carré l'est aussi, car la mise au carré est une fonction strictement croissante (lorsque son argument est positif, ce qui est le cas ici). Appliqué à l'expression (7), cela donne

$$A_{\text{triangle}}^2 = \frac{1}{4}b^2\left(\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{16}(b^2C^2 - b^4) \quad (15)$$

puis

$$\frac{d(A_{\text{triangle}}^2)}{db} = \frac{1}{16}(2bC^2 - 4b^3) = \frac{b}{8}(C^2 - 2b^2), \quad (16)$$

qui s'annule comme spécifié dans l'équation (10).

Méthode 4. La démarche est similaire avec le carré de l'équation (13).

Développement (suite)

Méthode 5. On appelle α l'angle entre la base et un des côté du triangle isocèle. La hauteur et la base du triangle isocèle valent

$$h = \frac{C}{2} \cos \alpha \quad \text{et} \quad b = 2 \frac{C}{2} \sin \alpha. \quad (17)$$

L'aire vaut donc

$$A_{\text{triangle}} = \frac{hb}{2} = \frac{C}{2} \cos \alpha \frac{C}{2} \sin \alpha = \frac{C^2}{8} 2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{C^2}{8} \sin 2\alpha. \quad (18)$$

Le sinus atteint son maximum, c'est-à-dire 1, pour $2\alpha = 90^\circ$, donc $\alpha = 45^\circ$, $h = \frac{C}{2\sqrt{2}}$, $b = \frac{C}{\sqrt{2}}$ et $A_{\text{triangle}} = \frac{C^2}{8}$, en accord avec les résultats attendus.

Méthode 6. Dans cette méthode (la plus simple de toutes!), on reconsidère l'orientation du triangle ... On appelle β l'angle au sommet du triangle isocèle. On considère qu'un des côtés latéraux du triangle isocèle est la base du triangle, de longueur $C/2$. La hauteur de ce triangle est alors obtenue par $(C/2) \sin \beta$. L'aire vaut alors

$$A_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} \frac{C}{2} \sin \beta \frac{C}{2}. \quad (19)$$

Elle est maximale lorsque $\sin \beta = 1$, c'est-à-dire que $\beta = 90^\circ$. Il s'agit d'un triangle isocèle rectangle, et les longueurs et aires s'ensuivent très facilement ...

Question 3: Primitive

Obtenez une primitive $g(x) = \int \left(\tan(x) - \frac{\sin(x)}{\sin(\cos(x))} \right) dx$ Aide: $\frac{2}{(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{(1+t)}$

$$g(x) = -\ln(|\cos x|) - \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+\cos(\cos x)}{1-\cos(\cos x)}\right|\right) + C$$

Développement

$$(1) \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$$

$$= - \int \frac{du}{u} = -\ln(|u|) = -\ln(|\cos x|)$$

$$(2) \int \frac{\sin x}{\sin(\cos x)} \, dx \quad u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$$

$$= - \int \frac{du}{\sin u} = - \int \frac{\sin u}{\sin^2 u} \, du = - \int \frac{\sin u}{(1-\cos^2 u)} \, du$$

$$t = \cos u \Rightarrow dt = -\sin u \, du$$

$$= \int \frac{dt}{(1-t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1-t)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1+t)}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(|1-t|) + \frac{1}{2} \ln(|1+t|) = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+\cos u}{1-\cos u}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+\cos(\cos x)}{1-\cos(\cos x)}\right|\right)$$

Note: OK si pas utilisé les valeurs absolues!

Autre façon

Question 3: Primitive

Obtenez une primitive $g(x) = \int \left(\tan(x) - \frac{\sin(x)}{\sin(\cos(x))} \right) dx$ Aide: $\frac{2}{(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{(1+t)}$

$$g(x) = -\ln(|\cos x|) + \ln\left|\tan\left(\frac{\cos x}{2}\right)\right| + C$$

Développement

$$(2) \int \frac{\sin x}{\sin(\cos x)} dx \quad u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$= - \int \frac{du}{\sin u} \quad \sin u = 2 \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$= - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right)} du = - \frac{1}{2} \int \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right)} du$$

$$t = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} du$$

$$= - \int \frac{dt}{t} = -\ln(|t|)$$

$$= -\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| = -\ln\left|\tan\left(\frac{\cos x}{2}\right)\right|$$

Note: OK si pas utilisé les valeurs absolues!

Autre façon

Question 3: Primitive

Obtenez une primitive $g(x) = \int \left(\tan(x) - \frac{\sin(x)}{\sin(\cos(x))} \right) dx$ Aide: $\frac{2}{(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{(1+t)}$

$$g(x) = -\ln(|\cos x|) - \ln\left|\cotan\left(\frac{\cos x}{2}\right)\right| + C$$

Développement

$$(2) \int \frac{\sin x}{\sin(\cos x)} dx$$

$$v = \cos x \Rightarrow dv = -\sin x dx$$

$$= - \int \frac{dv}{\sin v}$$

$$\sin v = 2 \cos\left(\frac{v}{2}\right) \sin\left(\frac{v}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos\left(\frac{v}{2}\right) \sin\left(\frac{v}{2}\right)} dv = -\frac{1}{2} \int \frac{(\sin^2\left(\frac{v}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{v}{2}\right))}{\cos\left(\frac{v}{2}\right) \sin\left(\frac{v}{2}\right)} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{\sin\left(\frac{v}{2}\right)}{\cos\left(\frac{v}{2}\right)} dv - \frac{1}{2} \int \frac{\cos\left(\frac{v}{2}\right)}{\sin\left(\frac{v}{2}\right)} dv$$

$$s = \cos\left(\frac{v}{2}\right) \Rightarrow ds = -\sin\left(\frac{v}{2}\right) \frac{1}{2} dv$$

$$t = \sin\left(\frac{v}{2}\right) \Rightarrow dt = \cos\left(\frac{v}{2}\right) \frac{1}{2} dv$$

$$= \int \frac{ds}{s} - \int \frac{dt}{t} = \ln(|s|) - \ln(|t|) = \ln\left|\frac{s}{t}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{\cos\left(\frac{v}{2}\right)}{\sin\left(\frac{v}{2}\right)}\right| = \ln\left|\cotan\left(\frac{v}{2}\right)\right| = -\ln\left|\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right|$$

$$= \ln\left|\cotan\left(\frac{\cos x}{2}\right)\right| = -\ln\left|\tan\left(\frac{\cos x}{2}\right)\right|$$

Autre façon**Question 3: Primitive**Obtenez une primitive $g(x) = \int \left(\tan(x) - \frac{\sin(x)}{\sin(\cos(x))} \right) dx$ Aide: $\frac{2}{(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{(1+t)}$

$$g(x) = -\ln(|\cos x|) + \ln\left(\left|\tan\left(\frac{\cos x}{2}\right)\right|\right) + C$$

Développement

$$(2) \int \frac{\sin x}{\sin(\cos x)} dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$= - \int \frac{du}{\sin u}$$

$$\sin u = \frac{2 \tan\left(\frac{u}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{u}{2}\right)}$$

$$t = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)} \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{\left(\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)} \frac{1}{2} du$$

$$= \left(1 + \tan^2\left(\frac{u}{2}\right)\right) \frac{1}{2} du$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{\left(1 + \tan^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\tan\left(\frac{u}{2}\right)} du$$

$$= - \int \frac{dt}{t} = -\ln(|t|) = -\ln\left(\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right|\right)$$

$$= -\ln\left(\left|\tan\left(\frac{\cos x}{2}\right)\right|\right)$$

Autre façon d'écrire le résultat**Question 3: Primitive**Obtenez une primitive $g(x) = \int \left(\tan(x) - \frac{\sin(x)}{\sin(\cos(x))} \right) dx$ Aide: $\frac{2}{(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{(1+t)}$

$$g(x) = -\ln(|\cos x|) + \ln\left(\left|\frac{1 - \cos(\cos x)}{\sin(\cos x)}\right|\right) + C$$

Développement

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \Rightarrow 1 - \cos(2a) = 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

$$\hookrightarrow \frac{(1 - \cos u)}{\sin u} = \frac{2\sin^2(\frac{u}{2})}{2\cos(\frac{u}{2})\sin(\frac{u}{2})} = \frac{\sin(\frac{u}{2})}{\cos(\frac{u}{2})} = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$$

 $\hookrightarrow$ (2) peut aussi s'écrire:

$$-\ln\left(\left|\frac{1 - \cos u}{\sin u}\right|\right) = -\ln\left(\left|\frac{1 - \cos(\cos x)}{\sin(\cos x)}\right|\right)$$

Aussi:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \Rightarrow 1 + \cos(2a) = 2\cos^2 a$$

$$\hookrightarrow \frac{(1 + \cos u)}{(1 - \cos u)} = \frac{2\cos^2(\frac{u}{2})}{2\sin^2(\frac{u}{2})} = \cotan^2\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1 + \cos u}{1 - \cos u}\right|\right) &= \frac{1}{2} \ln\left(\cotan^2\left(\frac{u}{2}\right)\right) \\ &= \ln\left(\left|\cotan\left(\frac{u}{2}\right)\right|\right) \end{aligned}$$

Question 4: Théorie et application

La fonction de Lambert, notée $W_0(y)$, est la réciproque de la fonction $f(x) = x e^x$ pour les valeurs de x dans l'intervalle $I = [-1, +\infty[$: c'est-à-dire que $W_0(y) = x$ lorsque $y = x e^x$. On a donc aussi que $W_0(y) e^{W_0(y)} = y$.

- Que valent $W_0(0)$, $W_0(e)$ et $W_0(-e^{-1})$? **Aide:** Considérez la valeur de la fonction $f(x)$ pour quelques valeurs simples de son argument.
- La fonction $W_0(y)$ est-elle (strictement) croissante ou (strictement) décroissante ? Pourquoi ?
- Quel est le domaine de définition de $W_0(y)$?
- La fonction $W_0(y)$ est-elle continue dans son domaine de définition ? Pourquoi ?
- Obtenez la dérivée $W'_0(y)$ de la fonction $W_0(y)$. Que valent $W'_0(0)$ et $W'_0(e)$?
- La dérivée de $W_0(y)$ existe-t-elle en $y = -e^{-1}$? Pourquoi ?

$W_0(0) = \dots 0 \dots$

$W_0(e) = \dots 1 \dots$

$W_0(-e^{-1}) = \dots -1 \dots$

Sélectionnez: $W_0(y)$ est (strictement) croissante / ~~(strictement) décroissante~~

Le domaine de définition de $W_0(y)$ est $D = [-e^{-1}, +\infty[$

Sélectionnez: $W_0(y)$ est / ~~n'est pas~~ continue

$W'_0(y) = (1 + W_0(y))^{-1} e^{-W_0(y)}$

$W'_0(0) = \dots 1 \dots$

$W'_0(e) = \dots 1/(2e) \dots$

Sélectionnez: $W'_0(-e^{-1})$ ~~existe~~ / n'existe pas

Développement

$f(0) = 0e^0 = 0$, donc $W_0(0) = 0$.

$f(1) = 1e^1 = e$, donc $W_0(e) = 1$.

$f(-1) = (-1)e^{-1} = -e^{-1}$, donc $W_0(-e^{-1}) = -1$.

En préalable, on note que dans l'intervalle $I = [-1, +\infty[$, la fonction $f(x) = x e^x$ est continue et dérivable. Sa fonction dérivée $f'(x) = (1 + x)e^x$ est positive ou nulle dans l'intervalle I . Elle s'annule uniquement en $x = -1$, et un extremum y est observé, mais dans l'intervalle I , il y a bien croissance stricte même en $x = -1$. De ce fait, la fonction $W_0(y)$ est bien définie de manière univoque en chaque point correspondant à la définition de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle I . Ceci permet de répondre aux questions suivantes.

Développement (suite)

La réciproque d'une fonction strictement croissante est elle-même strictement croissante.

Le domaine de définition de la fonction $W_0(y)$ est l'image de l'intervalle I par la fonction $f(x)$, à savoir $D = [-e^{-1}, +\infty[$. La borne inférieure avait déjà été calculée, $f(-1) = -e^{-1}$. La borne supérieure est la limite de $f(x)$ pour x tendant vers l'infini positif, soit $+\infty$.

La fonction réciproque d'une fonction continue, strictement croissante, est elle-même une fonction continue, strictement croissante.

Pour calculer la dérivée de $W_0(y)$ il y a plusieurs méthodes.

Méthode 1 On dérive la relation $W_0(y) e^{W_0(y)} = y$ par rapport à y , soit :

$$W'_0(y) e^{W_0(y)} + W_0(y) W'_0(y) e^{W_0(y)} = 1, \quad (20)$$

donc

$$W'_0(y) = (1 + W_0(y))^{-1} e^{-W_0(y)}. \quad (21)$$

Méthode 2 On utilise la formule générique pour la dérivée des fonctions réciproques. Pour rappel, soit g la fonction réciproque de la fonction f , alors $x = g(y) = g(f(x))$, et en dérivant, on obtient $1 = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(y) \cdot f'(g(y))$, donc

$$g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}. \quad (22)$$

Dans le cas de la fonction traitée ici,

$$f'(x) = e^x + x e^x, \quad (23)$$

donc

$$W'_0(y) = (e^{W_0(y)} + W_0(y) e^{W_0(y)})^{-1}. \quad (24)$$

Les résultats (21) et (24) sont évidemment équivalents.

De plus, on peut utiliser $W_0(y) e^{W_0(y)} = y$ pour déduire

$$W'_0(y) = (e^{W_0(y)} + y)^{-1}, \quad (25)$$

ou encore

$$W'_0(y) = (y W_0(y)^{-1} + y)^{-1} = \frac{W_0(y)}{y(1 + W_0(y))}. \quad (26)$$

Développement (suite)

En se basant sur les équations (21), (24), ou (25) il s'ensuit que

$$W'_0(0) = (1 + 0)^{-1}e^{-0} = 1, \quad (27)$$

et

$$W'_0(e) = (1 + 1)^{-1}e^{-1} = 1/(2e). \quad (28)$$

L'équation (26) mène à une indétermination pour $y = 0$, ce qui est gênant, mais pourrait être traité par les méthodes usuelles dans ce cas.

Pour l'argument $y = -e^{-1}$, $W_0(y) = -1$, et l'inverse de $1 + W_0(y)$ dans l'équation (15) ou équivalentes n'existe pas. La fonction $W_0(y)$ n'est donc pas dérivable en $y = -e^{-1}$.