

NOM:

Prénom:

Numéro:

Page 1/5

ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
DE LOUVAIN

UCLouvain – Géométrie – Session de septembre – 31/08/2026

Durée 2h30 – répondre dans les cadres et utiliser le verso comme brouillon (non lu).

Question 1 – Géométrie Analytique dans le planDans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation :

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0.$$

- 1.a. Après avoir mis cette équation sous sa forme réduite, déterminer sa nature (le type de conique) et ses foyers F_1 et F_2 :

équation :

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

nature :

Ellipse

 $F_1 \equiv$

$$(2, -1 - \sqrt{5})$$

 $F_2 \equiv$

$$(2, -1 + \sqrt{5})$$

Justifiez brièvement votre solution ici.

On complète les carrés : $9(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 2y) + 4 = 0$, $9((x-2)^2 - 4) + 4((y+1)^2 - 1) + 4 = 0$.
Ainsi, $9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 36$, donc l'équation réduite est :

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Le centre est $C(2, -1)$, avec $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2 - b^2 = 5$.

Comme le grand axe est vertical, les foyers sont :

$$F_1(2, -1 + \sqrt{5}), \quad F_2(2, -1 - \sqrt{5}).$$

- 1.b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de cette ellipse avec la droite d'équation $y = x - 1$.

 $A \equiv$

$$(0, -1)$$

 $B \equiv$

$$\left(\frac{36}{13}, \frac{23}{13}\right)$$

Justifiez brièvement votre solution ici.

On remplace y par $x - 1$: $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1$.

En multipliant par 36, $9(x-2)^2 + 4x^2 = 36$,

d'où $13x^2 - 36x = 0$.

Ainsi, $x = 0$ ou $x = \frac{36}{13}$.

Comme $y = x - 1$, les points d'intersection sont :

$$A(0, -1) \text{ et } B\left(\frac{36}{13}, \frac{23}{13}\right).$$

NOM:

Numéro:

Page 2/5

Prénom:



UCLouvain – Géométrie – Session de septembre – 31/08/2026

Durée 2h30 – répondre dans les cadres et utiliser le verso comme brouillon (non lu).

Question 2 – Géométrie analytique dans l'espace

Une société minière souhaite creuser une nouvelle galerie afin d'exploiter un filon de minerai. Les galeries sont modélisées dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'unité étant le mètre. La galerie principale est représentée par la droite d_1 passant par le point $A(0, 0, -5)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2, 1, 2)$.

Afin de respecter une distance de sécurité avec cette galerie, une galerie secondaire doit être creusée parallèlement à la première, à une distance de $2\sqrt{5}$ m, dans la direction du vecteur $\vec{v} = (1, -2, 0)$. Le filon de minerai est modélisé par le plan $\pi : x + y + z = 4$.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

2.a. Déterminer une équation paramétrique de la galerie secondaire.

Justifiez brièvement votre solution ici.

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{v} = (1, -2, 0)$ est perpendiculaire à $\vec{u} = (2, 1, 2)$ car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 2 + 0 = 0$.

De plus, $|\vec{v}| = \sqrt{5}$. Pour obtenir une distance de $2\sqrt{5}$, on considère donc le vecteur $2\vec{v} = (2, -4, 0)$. Un point de la galerie secondaire est alors $B = A + 2\vec{v} = (0, 0, -5) + (2, -4, 0) = (2, -4, -5)$. Comme la galerie secondaire est parallèle à d_1 , elle a pour vecteur directeur $\vec{u}$.

2.b. Déterminer les coordonnées du point C où la galerie principale rencontre le filon de minerai. En déduire la longueur L de galerie à creuser entre son point d'entrée et le point C .

$$C \equiv \left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{7}{5} \right)$$

$$L = \frac{27}{5}$$

Justifiez brièvement votre solution ici.

En utilisant d_1 , on a $x = 2t$, $y = t$ et $z = -5 + 2t$.

Le point C appartient également au plan π , donc $(2t) + t + (-5 + 2t) = 4$.

Ainsi, $5t = 9$, d'où $t = \frac{9}{5}$.

Les coordonnées de C sont donc $C \left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{7}{5} \right)$.

Le point d'entrée étant $A(0, 0, -5)$, la longueur à creuser vaut

$$L = AC = \left| \frac{9}{5} \right| |\vec{u}|.$$

Or $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, donc

$$L = \frac{9}{5} \times 3 = \frac{27}{5}.$$

NOM:

Prénom:

Numéro:

Page 3/5



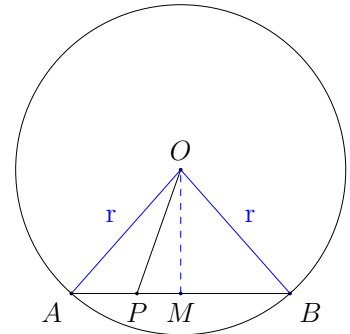
UCLouvain – Géométrie – Session de septembre – 31/08/2026

Durée 2h30 – répondre dans les cadres et utiliser le verso comme brouillon (non lu).

Question 3 – Géométrie synthétique (1) : rayon

Soit un cercle de centre O et de rayon r ainsi qu'une corde $[AB]$ tels qu'illustrés ci-contre. Le point P se situe sur la corde $[AB]$ tel que $|AP| = 3 \text{ cm}$, $|PB| = 7 \text{ cm}$ et $|OP| = 6 \text{ cm}$.

L'objectif est de calculer le rayon du cercle.



3.a. Sans calcul ni démonstration, énoncer clairement et succinctement les étapes clés d'une résolution du problème. Numéroter ces étapes dans l'ordre du raisonnement proposé.

Soit M le milieu de $[AB]$.

1. Justifier que $OM \perp AB$
2. Calculer $|OM|^2$ dans le triangle rectangle OMP .
3. Calculer $r = |OA|$ dans le triangle rectangle OMA .

3.b. Suivre point par point le raisonnement décrit ci-dessus afin de calculer le rayon demandé.

Justifier soigneusement chaque étape.

D'abord, on observe que $2|AM| = |AP| + |PB| = 3 \text{ cm} + 7 \text{ cm}$.

D'où $|AM| = 5 \text{ cm}$ et $|PM| = |AM| - |AP| = 2 \text{ cm}$.

$$r = \boxed{\sqrt{57} \text{ cm}}$$

1. Par construction M appartient à la médiatrice de $[AB]$. Par ailleurs, $|OA| = |OB|$, donc O aussi. Dès lors cette médiatrice est OM et $OM \perp AB$.
2. Dans le triangle OMP rectangle en M , on a $|OM|^2 = |OP|^2 - |PM|^2 = (36 - 4) \text{ cm}^2$.
3. Dans le triangle OMA rectangle en M , on a $r^2 = |OA|^2 = |AM|^2 + |OM|^2 = (25 + 32) \text{ cm}^2$.

NOM:

Prénom:

Numéro:

Page 4/5



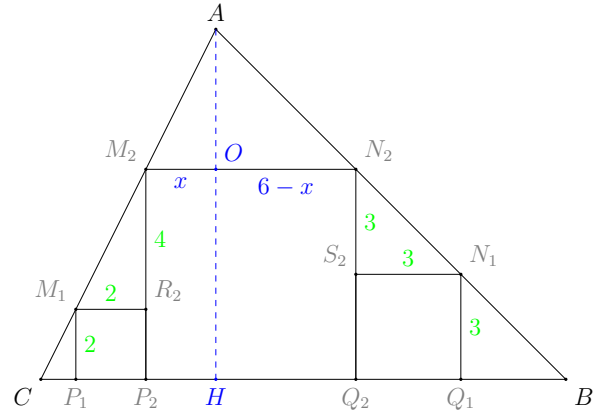
UCLouvain – Géométrie – Session de septembre – 31/08/2026

Durée 2h30 – répondre dans les cadres et utiliser le verso comme brouillon (non lu).

Question 4 – Géométrie synthétique (2) : “trois carrés pour un triangle”

Soit le triangle ABC illustré ci-contre tel que $M_1, M_2 \in [AC]$, $N_1, N_2 \in [AB]$ et $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in [BC]$. Dans le triangle AN_2M_2 , le point O (à ajouter) est le pied de la hauteur issue de A .

Sachant que les trois quadrilatères $M_1R_2P_2P_1$, $M_2N_2Q_2P_2$ et $S_2N_1Q_1Q_2$ sont des carrés dont les aires sont respectivement 4 cm^2 , 36 cm^2 et 9 cm^2 , l'objectif de cette question est de déterminer l'aire du triangle.



4.a. Calculer la longueur de la base $[BC]$.

Indice : rechercher les bons triangles semblables.

On décompose $|CB| = |CP_1| + \underbrace{|P_1P_2|}_{2\text{ cm}} + \underbrace{|P_2Q_2|}_{6\text{ cm}} + \underbrace{|Q_2Q_1|}_{3\text{ cm}} + |Q_1B|$.

$|PB| = 15\text{ cm}$

Les triangles CP_1M_1 et $M_1R_2M_2$ sont semblables car leurs côtés correspondants sont deux à deux parallèles. En découle alors $\frac{|CP_1|}{|P_1M_1|} = \frac{|M_1R_2|}{|R_2M_2|}$ et donc $|CP_1| = \frac{2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}}{6\text{ cm} - 4\text{ cm}} = 1\text{ cm}$.

Les triangles Q_1BN_1 et $S_2N_1N_2$ sont semblables car leurs côtés correspondants sont deux à deux parallèles. En découle alors $\frac{|Q_1B|}{|Q_1N_1|} = \frac{|S_2N_1|}{|S_2N_2|}$ et donc $|Q_1B| = \frac{3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{6\text{ cm} - 3\text{ cm}} = 3\text{ cm}$.

4.b. Soit $x = |M_2O|$. Trouver deux façons (indépendantes) d'exprimer $|AO|$ en fonction de x .

1. $|AO| = 2x$

2. $|AO| = 6 - x$

Les triangles M_2OA et $M_1R_2M_2$ sont semblables car leurs côtés correspondants sont deux à deux parallèles. En découle alors $\frac{|AO|}{|M_2O|} = \frac{|M_2R_2|}{|M_1R_2|}$ et donc $|AO| = \frac{4\text{ cm} \cdot x}{2\text{ cm}} = 2x$.

Les triangles AON_2 et $N_2S_2N_1$ sont semblables car leurs côtés correspondants sont deux à deux parallèles. En découle alors $\frac{|AO|}{|ON_2|} = \frac{|N_2S_2|}{|S_2N_1|}$ et donc $|AO| = \frac{(|M_2N_2| - |M_2O|) \cdot 3\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 6 - x$.

NOM:

Prénom:

Numéro:

Page 5/5



UCLouvain – Géométrie – Session de septembre – 31/08/2026

Durée 2h30 – répondre dans les cadres et utiliser le verso comme brouillon (non lu).

4.c. Conclure en donnant l'aire du triangle ABC . Justifier.

Utiliser les réponses précédentes ou tout autre argument détaillé.

$$|\triangle ABC| = 75 \text{ cm}^2$$

Les deux expressions de $|AO|$ à la sous question précédente donne l'équation $2x = 6 - x$.

La solution de cette équation est $x = 2$ et ainsi $|OA| = 4 \text{ cm}$. La hauteur du triangle ABC vaut alors $|OA| + |OH| = 10 \text{ cm}$.

Comme on sait que la base vaut 15 cm , on trouve directement l'aire demandée.