

NOM	NUMÉRO	UCLouvain
Prénom		page 1/8



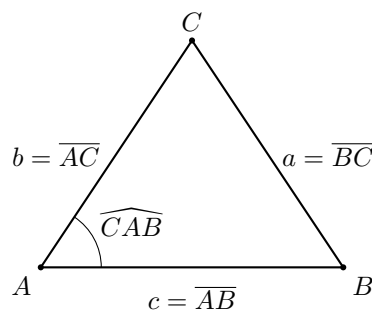
ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
DE LOUVAIN

UCLouvain - Examen d'admission – Trigonométrie – 07/07/2025

Durée 1h30 – 8 pages – répondre directement dans les cadres – pas de calculatrice

Notations et conventions

- $\sin^n x$ signifie $(\sin(x))^n$, et de même $\cos^n x = (\cos(x))^n$, etc.
- Les longueurs de segments sont notées avec une barre : $\overline{AB}$ désigne la distance entre les points A et B .
- Un angle comme $\widehat{BAC}$ désigne l'angle formé au point A , entre les segments $[AB]$ et $[AC]$.
- Dans un triangle ABC , les longueurs a, b, c désignent respectivement les côtés opposés aux sommets A, B et C .
- Les angles sont exprimés en radians sauf indication contraire pour indiquer que ce sont des degrés. Par exemple : 15° .



Consignes Générales

- Pas de calculatrice ni objets connectés.
- L'examen comporte 2 feuilles **recto-verso** sur lesquelles il vous est demandé de répondre à **3 questions**.
- Écrivez votre nom et prénom ainsi que votre numéro d'inscription sur les 4 pages.
- Des feuilles de brouillon vous ont été fournies. L'utilisation de brouillons personnels est interdite.
- Vous pouvez utiliser un crayon mais faites en sorte que vos réponses soient lisibles. Plus généralement, fournissez une copie la plus soignée possible.
- À l'issue de l'épreuve, veuillez ne rendre que les deux feuilles, dans l'ordre. Ne rendez pas de feuille de brouillon !

NOM	NUMÉRO	UCLouvain
Prénom		page 2/8

Question 1 – Équation trigonométrique (≈ 8 points)

Trouvez toutes les solutions réelles de l'équation trigonométrique suivante

$$\sin^2(4x) + \cos^4(2x) = 1.$$

Solution. On utilise

$$\sin(4x) = 2 \sin(2x) \cos(2x).$$

Ainsi,

$$\sin^2(4x) = 4 \sin^2(2x) \cos^2(2x).$$

Posons

$$u = \cos^2(2x).$$

Alors

$$\sin^2(2x) = 1 - u.$$

L'équation devient

$$4u(1 - u) + u^2 = 1.$$

Après développement,

$$3u^2 - 4u + 1 = 0.$$

On factorise :

$$(3u - 1)(u - 1) = 0.$$

Ainsi,

$$u = 1 \quad \text{ou} \quad u = \frac{1}{3}.$$

Premier cas : si $u = 1$, alors

$$\cos^2(2x) = 1 \iff 2x = k\pi \iff x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Second cas : si $u = \frac{1}{3}$, alors

$$\cos(2x) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

En posant $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, on obtient

$$2x = \pm\alpha + k\pi, \quad \text{donc} \quad x = \frac{1}{2}(\pm\alpha + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Finalement,

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} \left(\pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Barème indicatif (total : 8 points).

Identité $\sin(4x) = 2 \sin(2x) \cos(2x)$ et mise au carré correcte	1 pt
Choix de $u = \cos^2(2x)$ et utilisation de $\sin^2(2x) = 1 - u$	1 pt
Obtention de $4u(1 - u) + u^2 = 1$, puis de $3u^2 - 4u + 1 = 0$	1 pt
Factorisation et racines $u = 1$ ou $u = \frac{1}{3}$	1 pt
Traitement de $u = 1$: $x = \frac{k\pi}{2}$	1 pt
Passage de $u = \frac{1}{3}$ à $\cos(2x) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1 pt
Résolution complète du second cas	1,5 pt
Réunion des deux familles et indication $k \in \mathbb{Z}$	0,5 pt

NOM	NUMÉRO	UCLouvain
Prénom		page 3/8

Question 1 – Corrigé alternatif (deuxième voie)

On résout de nouveau

$$\sin^2(4x) + \cos^4(2x) = 1,$$

en exprimant cette fois toute l'équation en fonction de $\cos(4x)$.

Solution alternative. On utilise les identités

$$\sin^2(4x) = 1 - \cos^2(4x) \quad \text{et} \quad \cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}.$$

Par conséquent,

$$\cos^4(2x) = \left(\frac{1 + \cos(4x)}{2} \right)^2.$$

Posons

$$c = \cos(4x).$$

L'équation devient

$$1 - c^2 + \left(\frac{1 + c}{2} \right)^2 = 1.$$

En multipliant par 4 et en développant, on obtient

$$4 - 4c^2 + 1 + 2c + c^2 = 4,$$

d'où

$$3 \cos^2(4x) - 2 \cos(4x) - 1 = 0.$$

Cette équation se factorise sous la forme

$$(3c + 1)(c - 1) = 0.$$

Ainsi,

$$\cos(4x) = 1 \quad \text{ou} \quad \cos(4x) = -\frac{1}{3}.$$

Premier cas :

$$\cos(4x) = 1 \iff 4x = 2k\pi \iff x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Second cas : en posant

$$\beta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right),$$

on a

$$4x = \pm\beta + 2k\pi,$$

donc

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Finalement,

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \pm \frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cette écriture est équivalente à celle du premier corrigé, car

$$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

NOM	NUMÉRO	UCLouvain
Prénom		page 4/8

Question 1 – Corrigé alternatif (troisième voie)

On résout de nouveau

$$\sin^2(4x) + \cos^4(2x) = 1,$$

en transformant l'équation en une équation homogène en $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$.

Solution alternative – méthode homogène. On remplace les deux membres de l'équation à l'aide des identités

$$\sin^2(4x) = 4 \sin^2(2x) \cos^2(2x)$$

et

$$1 = (\cos^2(2x) + \sin^2(2x))^2.$$

L'équation devient donc

$$4 \sin^2(2x) \cos^2(2x) + \cos^4(2x) = (\cos^2(2x) + \sin^2(2x))^2.$$

En développant le membre de droite, on obtient

$$4 \sin^2(2x) \cos^2(2x) + \cos^4(2x) = \cos^4(2x) + 2 \sin^2(2x) \cos^2(2x) + \sin^4(2x).$$

Après simplification et factorisation,

$$2 \sin^2(2x) \cos^2(2x) - \sin^4(2x) = 0,$$

puis

$$\boxed{\sin^2(2x)(2 \cos^2(2x) - \sin^2(2x)) = 0}.$$

Premier cas :

$$\sin(2x) = 0 \iff 2x = k\pi \iff x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Second cas :

$$2 \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = 0.$$

Dans ce cas, $\cos(2x) \neq 0$; on peut donc diviser par $\cos^2(2x)$:

$$2 - \tan^2(2x) = 0 \iff \tan(2x) = \pm\sqrt{2}.$$

En posant

$$\alpha = \arctan(\sqrt{2}),$$

il vient

$$2x = k\pi \pm \alpha,$$

donc

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Finalement,

$$\boxed{x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cette écriture est équivalente à celle du premier corrigé, car

$$\arctan(\sqrt{2}) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

NOM	NUMÉRO	UCLouvain
Prénom		page 5/8

Question 1 – Corrigé alternatif (quatrième voie)

On résout de nouveau

$$\sin^2(4x) + \cos^4(2x) = 1,$$

par une méthode homogène en utilisant directement la tangente, sans factoriser l'équation obtenue.

Solution alternative – homogénéisation et tangente. Comme dans la voie précédente, on utilise

$$\sin^2(4x) = 4 \sin^2(2x) \cos^2(2x)$$

et

$$1 = (\cos^2(2x) + \sin^2(2x))^2.$$

On obtient l'équation homogène

$$4 \sin^2(2x) \cos^2(2x) + \cos^4(2x) = (\cos^2(2x) + \sin^2(2x))^2.$$

Commençons par remarquer que $\cos(2x)$ ne peut pas être nul. En effet, si $\cos(2x) = 0$, alors $\sin(4x) = 0$ et le membre de gauche de l'équation initiale vaut 0, et non 1.

On peut donc diviser l'équation homogène par $\cos^4(2x)$. Il vient

$$4 \tan^2(2x) + 1 = (1 + \tan^2(2x))^2.$$

Posons

$$t = \tan(2x).$$

Après développement et simplification,

$$t^4 - 2t^2 = 0.$$

Sans factoriser, on ajoute 1 aux deux membres afin de faire apparaître un carré parfait :

$$t^4 - 2t^2 + 1 = 1 \iff (t^2 - 1)^2 = 1.$$

Par conséquent,

$$t^2 - 1 = 1 \quad \text{ou} \quad t^2 - 1 = -1,$$

c'est-à-dire

$$t^2 = 2 \quad \text{ou} \quad t^2 = 0.$$

Si $t = 0$, alors

$$\tan(2x) = 0 \iff 2x = k\pi \iff x = \frac{k\pi}{2}.$$

Si $t = \pm\sqrt{2}$, alors

$$2x = k\pi \pm \arctan(\sqrt{2}),$$

d'où

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{2}).$$

Finalement,

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

NOM	NUMÉRO	UCLouvain
Prénom		page 6/8

Question 1 – Corrigé alternatif (cinquième voie)

On résout de nouveau

$$\sin^2(4x) + \cos^4(2x) = 1,$$

en posant cette fois $u = \sin^2(2x)$.

Solution alternative. On utilise

$$\sin^2(4x) = 4 \sin^2(2x) \cos^2(2x).$$

Posons

$$u = \sin^2(2x).$$

Comme $\sin^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$, on a

$$\cos^2(2x) = 1 - u \quad \text{et} \quad \cos^4(2x) = (1 - u)^2.$$

L'équation devient donc

$$4u(1 - u) + (1 - u)^2 = 1.$$

En développant,

$$4u - 4u^2 + 1 - 2u + u^2 = 1,$$

d'où

$$-3u^2 + 2u = 0.$$

On factorise :

$$u(2 - 3u) = 0.$$

Ainsi,

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad u = \frac{2}{3}.$$

Premier cas : si $u = 0$, alors

$$\sin^2(2x) = 0 \iff \sin(2x) = 0 \iff 2x = k\pi \iff x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Second cas : si $u = \frac{2}{3}$, alors

$$\sin^2(2x) = \frac{2}{3} \iff \sin(2x) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

En posant

$$\gamma = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$

on obtient

$$2x = k\pi \pm \gamma,$$

donc

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Finalement,

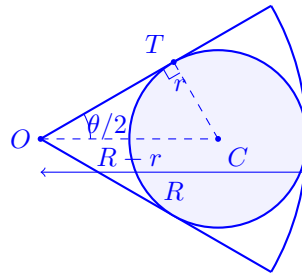
$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

NOM	NUMÉRO	UCLouvain
Prénom		page 7/8

Question 2 – Cercle inscrit dans un secteur circulaire (≈ 6 points)

2a Un secteur circulaire de rayon R et d'angle au centre θ (avec $0 < \theta < \pi$) est donné. On inscrit un cercle de rayon r à l'intérieur de ce secteur, de sorte qu'il soit tangent à l'arc de cercle ainsi qu'aux deux rayons qui délimitent le secteur.

Représentez la situation sur un schéma en indiquant le centre O du secteur, le rayon R , l'angle au centre θ , le cercle inscrit de rayon r , son centre C et un point de tangence T avec l'un des rayons.



2b Exprimez le rayon r du cercle inscrit en fonction du rayon R du secteur et de l'angle au centre θ . Détaillez et justifiez les étapes de votre développement.

Par symétrie, C appartient à la bissectrice de l'angle au centre, donc $\widehat{COT} = \theta/2$. Au point de tangence T , on a $CT \perp OT$: le triangle OCT est rectangle en T , avec $CT = r$ et $OC = R - r$. Dès lors,

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{CT}{OC} = \frac{r}{R-r}.$$

En isolant r , il vient

$$r = (R-r) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \implies r \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Réponse finale : $r = \frac{R \sin(\theta/2)}{1 + \sin(\theta/2)}$

2c Déterminer la valeur de l'angle au centre θ (en radians et en degrés) pour laquelle le rayon du cercle inscrit r est égal au tiers du rayon du secteur R (c'est-à-dire $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$). Justifiez vos calculs.

1. D'après la formule établie à la question précédente,

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin(\theta/2)}{1 + \sin(\theta/2)}.$$

2. On impose le rapport souhaité :

$$\frac{\sin(\theta/2)}{1 + \sin(\theta/2)} = \frac{1}{3}.$$

3. On résout cette équation :

$$3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \implies \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Puisque $0 < \theta < \pi$, nous avons $0 < \theta/2 < \pi/2$. La seule solution est donc $\theta/2 = \pi/6$.

Réponse finale : $\theta = \frac{\pi}{3}$ (ou 60°)

NOM	NUMÉRO	UCLouvain
Prénom		page 8/8

Question 3 – Questions diverses (≈ 6 points).

Utilisez les feuilles de brouillon pour établir les réponses finales à ces 6 questions et écrivez **uniquement** ces réponses finales dans les cadres.

3a Soit $ABCD$ un trapèze isocèle dont les bases parallèles $[AB]$ et $[CD]$ mesurent respectivement $\overline{AB} = x$ et $\overline{CD} = y$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent à angle droit (90°).
Déterminez l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de x et y .

$$\text{Aire} = \frac{(x+y)^2}{4}$$

3b Donnez uniquement les solutions de l'équation suivante pour $0 \leq x < 2\pi$.

$$\sin(2x) = \cos x, \quad \text{Solution(s)} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

3c Calculez la valeur exacte.

$$\cos^4(22,5^\circ) - \sin^4(22,5^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3d Si $\sin(\theta) = x$ avec $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, exprimez $\cos(3\theta)$ en fonction de x uniquement. La réponse finale ne doit plus contenir de fonctions trigonométriques.

$$\cos(3\theta) = (1 - 4x^2)\sqrt{1 - x^2}$$

3e Dans un triangle rectangle isocèle, r et R désignent respectivement les rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit. Calculez exactement le rapport r/R .

$$\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$$

3f Calculez exactement.

$$\cos(20^\circ) \cos(40^\circ) \cos(80^\circ) = \frac{1}{8}$$